

Étude d'un invariant des nœuds alternés et mise en œuvre informatique

LUNEL Corentin
FAGES Hugo
REMBERT Quentin

Table des matières

1	Nœuds et entrelacs dans l'espace	2
2	Choix de modélisation	3
3	Mots de Gauss et diagrammes de cordes	5
4	Conjecture de Tait et classes d'équivalence	5
5	Factorisation des nœuds	7
6	Graphe d'emboîtement	8
7	Factorisation par graphe d'emboîtement et cardinal de décomposition	10

1 Nœuds et entrelacs dans l'espace

Commençons par introduire des définitions générales de théorie des nœuds [4]. D'autres définitions existent dans la littérature [2].

Définition 1.1 (Nœud). On appelle **nœud** tout ensemble de points de \mathbf{R}^3 homéomorphe au cercle unité $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition 1.2 (Entrelacs). On appelle **entrelacs** toute union finie non vide de nœuds disjoints deux à deux. Tout nœud est un entrelacs.

Définition 1.3 (Équivalence). Deux entrelacs E et E' sont dits **équivalents** s'il existe un homéomorphisme (bijection et bijection réciproque continues) $h : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tel que $h(E) = E'$.

Remarque 1.1. Ceci traduit la possibilité de déformer un brin sans le couper et le recoller. Le fait d'inclure l'espace dans la transformation force à transformer aussi l'espace entre les brins et donc permet d'interdire le brin de passer au travers d'un autre.

Définition 1.4 (Position régulière). Soit \mathcal{P} plan vectoriel de \mathbf{R}^3 , et $\pi_{\mathcal{P}}$ projecteur d'image \mathcal{P} . Un entrelacs polygonal E est dit en **position régulière** pour le plan \mathcal{P} si $\{x \in \pi_{\mathcal{P}}(E) \mid \text{Card}(\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x)) > 2\} = \emptyset$ et si l'ensemble des points doubles $\{x \in \pi_{\mathcal{P}}(E) \mid \text{Card}(\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x)) = 2\}$ est fini et disjoint de l'ensemble des sommets de E .

Nous allons nous intéresser aux entrelacs apprivoisés car ceux-ci peuvent être "dessinés" sur le plan sans ambiguïté. C'est-à-dire projetés dans le plan en une **projection générique**.

Définition 1.5 (Entrelacs apprivoisé). Un entrelacs ou un nœud est dit **polygonaal** s'il est l'union d'un nombre fini de segments. Un entrelacs est dit **apprivoisé** s'il est équivalent à un entrelacs polygonal.

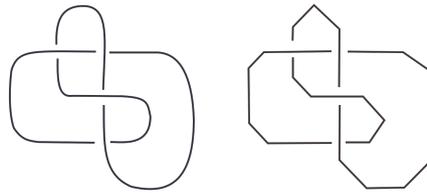


FIGURE 1 – Le "nœud de huit" est apprivoisé

Proposition 1.1 (Projection). Soit E un entrelacs apprivoisé. Il existe un entrelacs polygonal E' équivalent à E et un plan vectoriel \mathcal{P} de \mathbf{R}^3 tel que E' soit en position régulière pour \mathcal{P} .

On dit alors que $\pi_{\mathcal{P}}(E')$ en signant les points doubles est une **projection générique** de E .

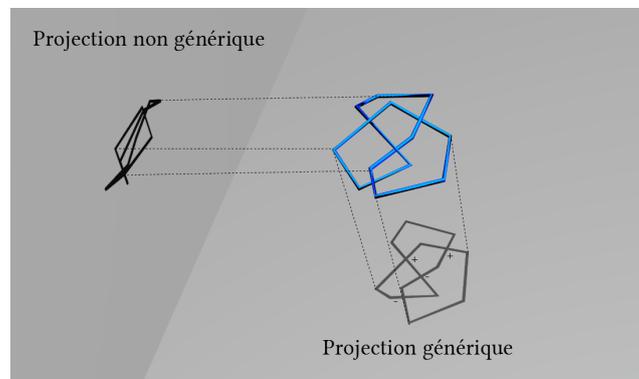


FIGURE 2 – Deux projections du nœud de huit

Nous allons restreindre dans la suite notre étude aux nœuds et entrelacs apprivoisés.

2 Choix de modélisation

Cette partie propose une modélisation informatique des projections génériques : on utilise des matrices de symboles particuliers dont l'ensemble sera noté Σ . Ces symboles seront codés en machine de 0 à 10.

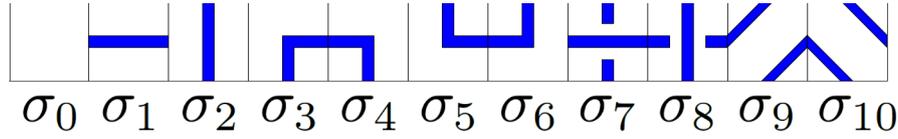


FIGURE 3 – Liste des éléments de Σ

On modélise et code ainsi des projections génériques de nœuds ou d'entrelacs de la manière suivante :

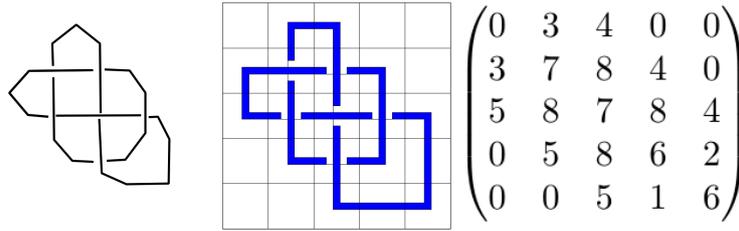


FIGURE 4 – Modélisation et codage d'un nœud de chaise

Les symboles peuvent être juxtaposés entre eux si leurs bords coïncident : un brin sortant doit rencontrer un brin sortant et un bord vide doit être juxtaposé à un autre bord vide. On veut vérifier ces critères de compatibilité dans notre modélisation.

Pour cela, on formalise par une valeur logique le caractère sortant d'un brin sur un bord : à chaque direction d'un symbole (gauche droite haut bas) est associé vrai si la case contient un brin sortant dans la direction considérée et faux sinon. On pose $g = (-1, 0)$, $d = (1, 0)$, $h = (0, 1)$, $b = (0, -1)$, $o = (0, 0)$ et $\mathcal{D} = \{d, g, h, b, o\}$ l'ensemble des directions.

Définition 2.1 (Ouverture). On appelle *ouverture sur la direction* $D \in \mathcal{D} \setminus \{o\}$ l'application :

$$\begin{aligned} oD &: \Sigma \longrightarrow \{Vrai, Faux\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{cases} Vrai & \text{si un brin de } \sigma \text{ touche le bord de la case dans la direction } D \\ Faux & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 2.2 (Compatibilité). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\Sigma)$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket$.

On dit que $m_{i,j}$ est *compatible dans la matrice* M si :

$$\forall D \in \mathcal{D} \setminus \{o\} \text{ en posant } D' = -D \text{ et } (i', j') = (i, j) + D : \begin{cases} (i', j') \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \Rightarrow oD(m_{i,j}) = oD'(m_{i',j'}) \\ (i', j') \notin \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \Rightarrow oD(m_{i,j}) = Faux \end{cases}$$

Définition 2.3 (Entrelacs). Une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\Sigma)$ dans laquelle chaque symbole est compatible dans M est appelée *entrelacs*.

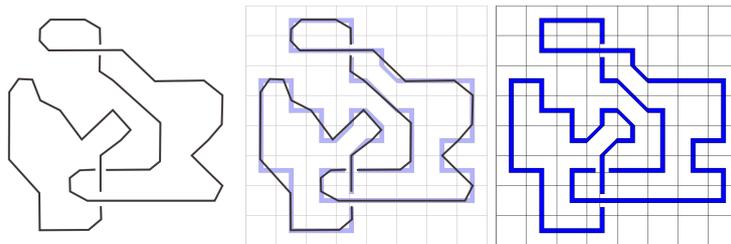


FIGURE 5 – L'entrelacs de Hopf modélisé par une matrice de symboles

Remarque 2.1. Cet algorithme (implémenté en la fonction `alea_entrelacs`) génère aléatoirement un entrelacs dans une matrice de taille $n \times p$ en $\mathcal{O}(np)$, $correct_{m_{i,j},d}$ étant l'ensemble des symboles autorisés à côté du symbole $m_{i,j}$ dans la direction d .

Algorithme 1 Génération d'entrelacs

- 1: M matrice de taille $n \times p$ contenant uniquement le symbole -1 compatible avec tout autre symbole
 - 2: $m = \text{entoure}(M)$ (M est entourée de 0 correspondant à σ_0)
 - 3: **for** i allant de 1 à $n+1$ **do**
 - 4: **for** j allant de 1 à $p+1$ **do**
 - 5: $P = correct_{m_{i,j-1},g} \cap correct_{m_{i,j+1},d} \cap correct_{m_{i-1,j},h} \cap correct_{m_{i+1,j},b}$
 - 6: Sélectionner au hasard la valeur de $m_{i,j}$ dans P
 - return** M
-

Un nœud correspond intuitivement à un seul "brin de ficelle" c'est-à-dire un ensemble de cases que l'on peut suivre du doigt en restant sur le brin. Cet ensemble est appelé composante connexe et on introduit les définitions suivantes pour formaliser cette idée.

On définit une fonction de lecture $l : \Sigma \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ qui à un symbole σ et une direction de lecture D associe une direction de sortie $\sigma.D$ conforme au sens du brin emprunté lorsque cela a un sens (la direction d'entrée correspond à un côté du symbole ayant un brin) sinon la lecture renvoie la direction nulle o .

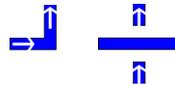


FIGURE 6 – Visualisation de $\sigma_6.d = h$ et de $\sigma_7.h = h$

Définition 2.4 (Chemin et composante connexe). On appelle **chemin** dans $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\Sigma)$ toute suite finie de cases et de directions $(i_k, j_k, d_k)_{0 \leq k \leq q}$ telle que $m_{i_0, j_0} \neq \sigma_0, \forall k \in \llbracket 0 ; q \rrbracket, d_k \neq o$, et $\forall k \in \llbracket 1 ; q - 1 \rrbracket, (i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_k, j_k) + d_{k+1}$, et $m_{i_k, j_k}.d_k = d_{k+1}$.

On appelle **circuit** un chemin injectif tel qu'en rajoutant (i_0, j_0, d_0) en dernier élément, il soit toujours chemin dans M . Lorsque $(i_k, j_k, d_k)_{0 \leq k \leq q}$ est un circuit, on appelle **composante connexe** de M l'ensemble $C = \{(i_k, j_k) \mid 0 \leq k \leq q\}$.

On aboutit alors à la définition suivante :

Définition 2.5 (Nœud). On appelle **nœud** un entrelacs ayant une seule composante connexe.

Remarque 2.2. Informatiquement il est possible de générer un nœud à partir d'un entrelacs. On peut par exemple extraire la plus grande composante connexe de l'entrelacs (fonction `alea_noeud_extraction`) mais cette méthode donne expérimentalement des nœuds peu denses. Une autre méthode consiste en modifier la valeur de certaines cases. Quand deux composantes connexes distinctes ont une case en commun (de symbole $\sigma_7, \sigma_8, \sigma_9$ ou σ_{10}) changer un symbole σ_9 ou σ_{10} en un symbole σ_7 ou σ_8 permet de lier les deux composantes (voir figure 7 et la fonction `alea_noeud_liaison`).

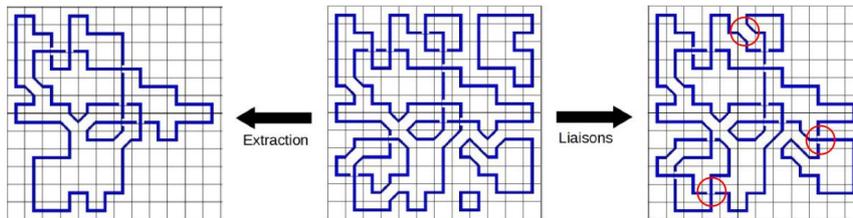


FIGURE 7 – Comparaison de deux méthodes de génération

Remarque 2.3. L'entrelacs "nul" $(\sigma_0)_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\Sigma)$ n'est pas un nœud.

Définition 2.6 (Nœud alterné). On appelle **nœud alterné** tout nœud dont il existe un diagramme de nœud tel qu'un parcours passe alternativement "en dessus" puis "en dessous" des croisements traversés.

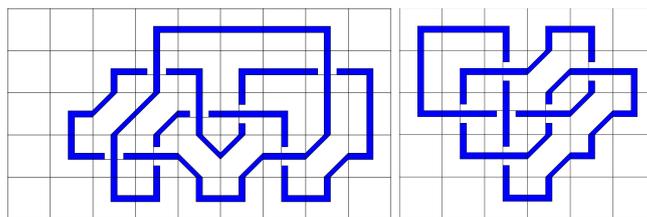


FIGURE 8 – Exemple de nœuds, respectivement non alterné et alterné

3 Mots de Gauss et diagrammes de cordes

Introduisons maintenant deux objets qui seront utiles pour la suite :

Définition 3.1 (Mot de Gauss et diagramme de cordes). Un **mot de Gauss** est un mot dont les lettres apparaissent exactement deux fois.

On peut associer à un nœud M un mot de Gauss. Pour le calculer on commence par nommer ses croisements (par convention numérotation dans l'ordre croissant de rencontre pendant un parcours du brin). La suite des noms des croisements rencontrés dans l'ordre de parcours forme un mot de Gauss du nœud M .

On représente aussi un mot de Gauss par un **diagramme de cordes** : un cercle sur lequel sont disposés régulièrement les noms des croisements tels qu'ils apparaissent dans le mot de Gauss et où on relie par une corde (un segment) les deux noms identiques (*mot_gauss* permet de calculer le mot de Gauss d'un nœud et *corde* d'afficher le diagramme de corde correspondant).

On remarque que le mot de Gauss ainsi calculé dépend du point de départ et du sens de lecture, on reviendra sur ce point par la suite.

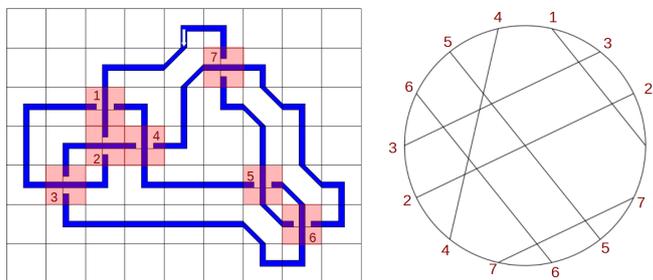


FIGURE 9 – Nœud, de mot de Gauss (1 2 3 1 4 5 6 3 2 4 7 6 5 7) et diagramme de corde associé.

4 Conjecture de Tait et classes d'équivalence

Dans le but de traduire l'équivalence des nœuds dans l'espace (voir 1.3) sur notre modèle, nous allons définir des classes d'équivalences sur les nœuds et les mots de Gauss. Pour cela nous passons par les retournements et pliages.

Un retournement consiste visuellement à effectuer l'opération suivante :



FIGURE 10 – Opération de retournement ("flype" en anglais)

Il existe deux types de retournements [7] qui ont des effets différents sur les mots de Gauss :

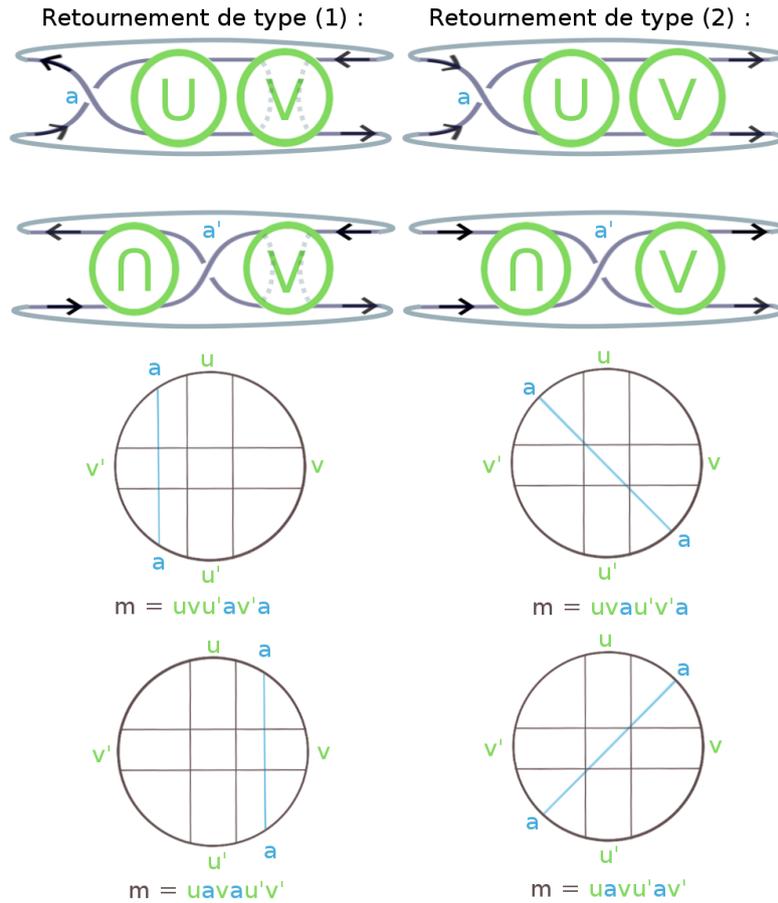


FIGURE 11 – Effets sur les diagrammes de cordes et mots de Gauss des retournements de types 1 et 2. Les portions du nœud "U" et "V" ont des croisements distincts, la partie "U" est retournée.

On définit ainsi formellement les retournements sur les mots de Gauss :

Définition 4.1 (Retournement). Soient a une lettre et u, v, u', v' des mots ne contenant pas a avec u, u' n'ayant aucune lettre en commun avec v, v' .

- Soit m un mot de Gauss de la forme $m = uvu'av'a$. Un **retournement de type 1** associe $m' = uavau'v'$ à m .
- Soit m un mot de Gauss de la forme $m = uvau'v'a$. Un **retournement de type 2** associe $m' = uvu'av'$ à m .

Définition 4.2 (Pliage). Soient a une lettre et u un mot de Gauss ne contenant pas a . On appelle **dépliage** (resp. **pliage**) l'opération qui à uaa associe u (resp. qui à u associe uaa).

On appelle **mouvement élémentaire** sur un mot de Gauss la permutation circulaire, l'image miroir, les retournements, les pliages et les dépliages.

Définition 4.3 (Isthme). Un croisement " a " introduit dans un mot de Gauss par pliage puis transformé par un nombre quelconque de mouvements élémentaires ne le supprimant pas est appelé un **isthme**.



FIGURE 12 – Le croisement " c " est appelé "isthme", on peut le supprimer avec un retournement et un dépliage.

Une conjecture de Tait (prouvée par M. Thistlethwaite et W. Menasco en 1991 [3] et qui sera admise ici) affirme que deux nœuds appriovisés alternés sont équivalents si et seulement si d'une projection générique alternée comprenant un minimum de croisements de l'un on peut passer à l'autre par une succession de retournements et éventuellement en inversant tous les croisements. **On se restreindra désormais à l'étude des nœuds alternés.** La définition 4.4 est justifiée par cette conjecture.

On note que les seuls mouvements élémentaires permettant de changer le nombre de croisements dans une représentation de nœud sont les pliages et dépliages. Avoir un nombre minimal de croisements correspond à se débarrasser de tous les isthmes.

Définition 4.4 (Équivalence de type). *Soient M et M' deux nœuds alternés, de mots de Gauss respectifs m et m' . S'il est possible après un nombre fini de mouvements élémentaires puis une renumérotation de transformer m en m' , alors on dit que M et M' sont de même **type**, et que m et m' sont de même **type de Gauss**. Un type de nœud se voit donc associer un unique type de Gauss (à renumérotation près).*

Remarque 4.1. *L'introduction de l'image miroir et de la permutation circulaire dans les mouvements élémentaire vient du calcul du mot de Gauss. L'image miroir correspond à parcourir le nœud dans le sens opposé tandis que la permutation circulaire correspond à choisir un autre point de départ dans le nœud.*

Proposition 4.1. *Les relations de type et de type de Gauss sont des relations d'équivalences.*

Définition 4.5 (Invariant de nœud). *On appellera **invariant de nœud** est une caractéristique commune à tous les individus d'un même type de nœud. C'est utile dans le sens où deux nœuds qui ont des invariants différents ont donc un type différent.*

5 Factorisation des nœuds

Maintenant que les classes d'équivalences sont bien définies nous pouvons nous intéresser à la définition d'invariants, à leurs calculs et comparaisons. Les invariants que nous allons définir sont en rapport avec une notion de factorisation en nœuds premiers. En effet, il est défini, sur les nœuds appriovisés de l'espace un produit reposant sur le principe visuel suivant :



FIGURE 13 – Cette opération définit visuellement un produit de A avec B noté $A\#B$

Cependant l'opération $\#$ est mal définie sur les mots de Gauss car dépendante des représentants des types de Gauss associés à A et B . Par exemple, un mot de Gauss de $A\#B$ est mg avec m un mot de Gauss de A n'ayant aucune lettre en commun avec g mot de Gauss de B . Or m et \tilde{m} (son image miroir), sont du même type de Gauss. Mais mg et $\tilde{m}g$ ne sont pas nécessairement de même type de Gauss.

Cette ambiguïté empêche donc de définir un produit sur les mots de Gauss. On peut néanmoins définir une factorisation.

Définition 5.1 (Mots et types de factorisation). *Soit un mot de gauss m non équivalent au nœud trivial. Des mots de Gauss non équivalents au mot vide m_1, \dots, m_r de lettres différentes entre eux tels que $m_1 \dots m_r$ soit du même type de Gauss que celui de m sont appelés **mots de factorisation** de m . En notant $t(m)$ le type de Gauss de m , $t(m_1), \dots, t(m_r)$ est une **factorisation** de $t(m)$.*

Remarque 5.1. *Pour m mot de Gauss non trivial, il existe toujours une telle famille de mots de factorisation car m est un mot de factorisation de m . De plus, un nœud peut avoir plusieurs mots de Gauss.*

Comme exposé dans l'introduction, deux mots de Gauss peuvent avoir un même type de factorisation mais représenter des nœuds différents.

Définition 5.2 (Mots, types et nœuds premiers). *Un type de Gauss t est dit **premier** si la seule factorisation de t est t . Un mot de Gauss m est dit **premier** si son type de Gauss est premier, un nœud est dit premier si un de ses mots de Gauss l'est et un type de nœud est dit premier si un de ses représentants l'est.*

Définition 5.3 (Décomposition en facteurs premiers). *Une famille m_1, \dots, m_r de mots de factorisations de m dont tous les mots sont premiers est une **décomposition** de m . Pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, m_i est alors une **composante première** de m .*

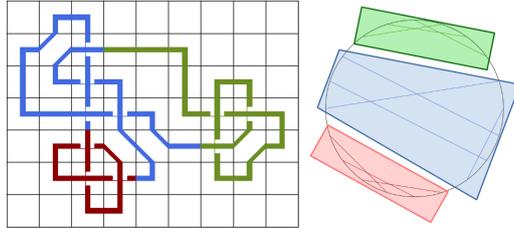


FIGURE 14 – Factorisation visuelle

Remarque 5.2 (Interprétation sur les diagrammes de cordes). *Une composante première correspond à une partie du diagramme de corde que l'on peut isoler (voir figure 14).*

Proposition 5.1 (Lemme de circulation). *Soit m un mot de Gauss de la forme $u\underline{x}pu'$ où p est une composante première et \underline{x} une lettre (qui donc n'est pas contenue dans p) alors m et $m' = up\underline{x}u'$ sont du même type de Gauss : p peut "circuler" à travers les lettres de m (voir 15).*

Preuve (Circulation) Soit \mathbf{p} une composante première de m et \underline{x} une lettre de m telle que $m = b\underline{x}b'\mathbf{p}$. On applique le retournement de type 1 : $vu'\underline{a}v'\underline{a}u \mapsto \underline{a}v\underline{a}'v'u$ pour $\underline{a} \leftarrow \underline{x}, u \leftarrow \mathbf{p}, u' \leftarrow \emptyset, v \leftarrow b$ et $v' \leftarrow b'$. Donc $b\underline{x}b'\mathbf{p}$ est équivalent à $\underline{x}b\underline{x}b'\mathbf{p}$ puis après permutation circulaire équivalent à $b\underline{x}b'\mathbf{p}\underline{x}$.

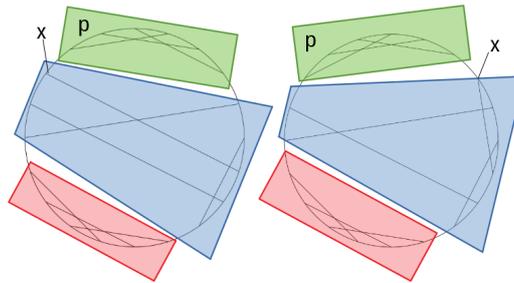


FIGURE 15 – Exemple de circulation

En appliquant ceci à toutes les lettres d'une composante on obtient la commutativité des composantes premières :

Proposition 5.2 (Commutativité des composantes premières). *Soit m un mot de Gauss de la forme $uxyu'$ où x et y sont des composantes premières de m . Alors m est de même type de Gauss que $uyxu'$.*

Nous proposerons une preuve du résultat suivant en section 7 car elle utilise un objet introduit en section 6.

Proposition 5.3 (Isolabilité d'un sous-mot). *Soit m un mot de Gauss non premier et non équivalent au mot vide. Il existe un mot de Gauss v non équivalent au mot vide tel que $m = uvu'$.*

Il est ainsi possible de repérer sur un mot de Gauss m donné des mots de factorisation de m . On peut pour cela chercher dans m un mot de Gauss p (qui existe d'après 5.3) tel que $m = bpb'$. Les mots bb' et p sont alors des mots de factorisation de m . En appliquant récursivement ce procédé à bb' et p , on finit par trouver une composante première m_1 de m . En utilisant 5.2, m est équivalent à m_1u , en recommençant le procédé sur u , on aboutit à une décomposition m_1, \dots, m_r de m . La proposition 5.2 garantie que $m_1 \dots m_r$ est du même type de Gauss que m . Cette méthode est cependant informatiquement coûteuse : pour m un mot de Gauss de taille n , il y a un $\mathcal{O}(n^2)$ sous mots. Savoir si le sous mot en question est un mot de Gauss se fait en $\mathcal{O}(n)$. Nous avons une complexité finale en $\mathcal{O}(n^3)$. Nous allons définir dans la partie suivante un invariant de nœud qui permet de réduire la complexité de ce calcul.

6 Graphe d'empoîtement

L'idée de l'invariant que nous définissons ici est de représenter sur un graphe les intrications des croisements du nœuds. Intuitivement ceci nous permet de trouver des groupes de croisements indépendants entre eux.

Nous allons définir tout d'abord cette notion de dépendance sur les mots de Gauss. Puis nous la traduirons au sein de tout un type de Gauss.

Définition 6.1 (Emboîtement). Soit $m = \underline{u}g\underline{u}'$ un mot de Gauss, avec \underline{x} lettre de m . On dit que \underline{x} **emboîte** \underline{y} dans m si \underline{y} est une lettre de g et $|u| + |u'| \geq |g|$ ou si \underline{y} est une lettre de uu' avec $|u| + |u'| \leq |g|$.

(1 2 3 4 2 1 5 6 4 3 7 8 9 7 8 9 6 5) (1 2 3 4 2 1 5 6 4 3 7 8 9 7 8 9 6 5)

FIGURE 16 – Dans cet exemple 1 emboîte 4 et 5 emboîte 1 mais 1 n'emboîte pas 5

Définition 6.2 (Graphe d'emboîtement mutuel). Soit m un mot de Gauss. On appelle **graphe d'emboîtement mutuel** le graphe non orienté de sommets les lettres de m et d'arêtes les paires $\{l_1, l_2\}$ lorsque l_1 et l_2 s'emboîtent mutuellement.

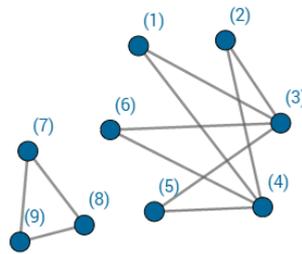


FIGURE 17 – Graphe d'emboîtement mutuel associé au mot de Gauss (1 2 3 4 2 1 5 6 4 3 7 8 9 7 8 9 6 5)

Le résultat suivant découle de la définition et permet de simplifier les preuves d'invariance qui vont suivre :

Proposition 6.1 (Caractérisation d'appartenance aux arêtes de G). Il y a une arête entre deux sommets x et y si et seulement s'ils sont alternés dans m , c'est-à-dire si m peut s'écrire $m_1\underline{x}m_2\underline{y}m_3\underline{x}m_4\underline{y}m_5$ (quitte à inverser les rôles de x et de y).

Invariance des composantes premières Observons un certain nombre d'invariances du graphe d'emboîtement lorsqu'on modifie le mot de Gauss par des opérations précises (celles qui unissent les mots par type de Gauss).

Permutation circulaire Toute rotation circulaire est une répétition du mouvement $r : m = \underline{a}m' \mapsto m'\underline{a}$ où \underline{a} est la première lettre de m et m' le reste du mot. Soient x et y alternés dans m . Les lettres x et y jouant des rôles symétriques, on peut supposer que x apparaît en premier.

- Si x n'est pas la première lettre, alors x et y sont alternés dans m' , donc dans $m'\underline{a}$, donc alternés après le mouvement.
- Si x est la première lettre, alors $m = x \dots y \dots x \dots y \dots$ qui s'écrit après le mouvement $\dots y \dots x \dots y \dots x$ dans lequel x et y sont aussi alternés.

Ainsi toute arête dans le graphe de m est préservée par r . On remarque que si ce mouvement est appliqué $\text{Card}(m)$ fois il correspond à l'identité, donc G n'est pas modifié par $\text{Card}(m)$ applications de r . S'il y avait création de nouvelle arête, G (après $\text{Card}(m)$ applications de r) aurait plus d'arête que G . Il n'y a donc ni suppression ni création d'arête.

Image miroir Soient x et y alternés dans $m = \dots x \dots y \dots x \dots y \dots$. Ils sont alternés dans l'image miroir $\dots y \dots x \dots y \dots x \dots$. Les arêtes sont donc conservées. L'image miroir étant involutive on a la même conclusion que la preuve précédente.

Pliage et dépliage Si deux lettres sont alternées dans m , elles le sont toujours dans maa . La lettre a n'emboîte aucune autre lettre, le sommet correspondant sur G est donc un point isolé. De même, si deux lettres différentes de a sont alternées dans maa , elles le sont toujours dans m , et G perd le point isolé a . Il n'y a donc ni suppression ni création d'arête.

Retournement Soit \underline{a} une lettre. Pour $m = uvu'\underline{a}v'\underline{a}$ (type 1) ou $m = uv\underline{a}u'v'\underline{a}$ (type 2), si x et y sont distincts de \underline{a} et alternés, ils le sont dans $uvu'v'$ et donc dans $u\underline{a}v\underline{a}u'v'$ ou $u\underline{a}v'u'\underline{a}v'$ (seul un \underline{a} est ajouté). Il reste donc le cas où $y = \underline{a}$ (le cas $x = \underline{a}$ étant le même : x et y ont des rôles symétriques).

— Pour le **retournement de type 1** : $m = uvu'\underline{a}v'\underline{a} \mapsto m' = u\underline{a}v\underline{a}u'v'$ où uu' et vv' sont à supports disjoints :

x et \underline{a} sont alternés dans m si et seulement si x a une occurrence dans uvu' et une dans v' ; c'est-à-dire il y a une occurrence de x dans v car x est dans v' et uu' et vv' sont à supports disjoints. C'est équivalent à x est dans v et $u'v'u$ soit, x et \underline{a} sont alternés dans m' .

— Pour le **retournement de type 2** : $m = uv\underline{a}u'v'\underline{a} \mapsto m' = u\underline{a}v'u'\underline{a}v'$

x et \underline{a} sont alternés dans m si et seulement s'il y a une occurrence de x dans v et v' ou dans u et u' ; c'est-à-dire x et \underline{a} sont alternés dans m'

Ainsi, deux lettres sont mutuellement emboîtées dans m si et seulement si elles le sont dans m' . Il n'y a donc ni suppression ni création d'arête par des retournements dans G

On vient de montrer l'invariance des composantes connexes à plus d'un sommet pour chaque mouvement élémentaire, ce qui correspond à montrer qu'aucune arête n'est créée ou supprimée lors d'un mouvement élémentaire sur un mot de Gauss.

Proposition 6.2 (Effet des pliages et dépliages sur le graphe). *On appelle **point isolé dans un graphe** : un sommet qui n'est extrémité d'aucune arête. Un isthme dans le mot correspond à un point isolé dans son graphe d'emboîtement mutuel. Un pliage introduit un point isolé dans le graphe d'emboîtement mutuel d'un mot de Gauss, un dépliage en supprime un.*

Proposition 6.3 (Invariance). *Après un nombre quelconque de mouvements élémentaires, un mot de Gauss possède, à points isolés près, le même graphe d'emboîtement mutuel (le développement ci-dessus en est la preuve).*

Définition 6.3 (Graphe d'emboîtement mutuel d'un type de Gauss). **Le graphe d'emboîtement mutuel d'un type de Gauss est celui d'un de ses représentants après avoir éventuellement supprimé ses sommets isolés.**

Théorème 1. *On peut associer à un type de nœud un unique type de Gauss auquel on associe un unique graphe d'emboîtement mutuel, donc ce **graphe d'emboîtement mutuel est un invariant de nœuds**.*

7 Factorisation par graphe d'emboîtement et cardinal de décomposition

Nous développons ici des applications du graphe d'emboîtement. La première étant une démonstration de la proposition 5.3 :

Preuve d'isolabilité Soit m un tel mot de Gauss. Supposons qu'il n'existe aucun mot de Gauss v non équivalent au mot vide tel que m s'écrive uvu' (*). Considérons C une composante connexe du graphe d'emboîtement de m . On peut écrire à permutation circulaire près $m = A\underline{x}B\underline{y}$ où \underline{x} et \underline{y} sont des lettres de C tandis que B non vide n'en contient aucune. D'après (*) B n'est pas un sous mot de Gauss donc il y a une lettre \underline{b} de B dans A . Soit :

— \underline{b} est alternée avec une lettre de C ce qui est impossible car sinon \underline{b} est dans C

— \underline{b} n'est alternée avec aucune lettre de C . On peut écrire m à permutation près $A_1\underline{b}A_2\underline{x}B\underline{y}$. Ainsi les lettres de C dans A_1 sont différentes de celles dans A_2 , leurs deux occurrences sont soit dans $A_2\underline{x}$ soit dans $\underline{y}A_1$. Il n'y a pas d'arêtes entre les lettres de ces deux ensembles, contradiction avec la connexité de C .

Proposition 7.1 (Décomposition en types de Gauss isolés). *Soit un mot de Gauss m et G son graphe d'emboîtement, de composantes connexes à plus de deux éléments C_1, \dots, C_r . Il existe une unique décomposition m_1, \dots, m_r de m , avec pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, m_i est un mot sur C_i .*

On appelle m_1, \dots, m_r la décomposition de m et $t(m_1), \dots, t(m_r)$ la décomposition en types isolés de $t(m)$.

Pour un nœud, le calcul du mot de Gauss consiste en un parcours du brin, ce qui est rapide. Calculer ensuite le graphe d'emboîtement à partir d'un mot de Gauss m de taille n est possible en $\mathcal{O}(n^2)$. Le graphe d'emboîtement mutuel G de m est donc rapidement calculable (fonction `graphe_emboitement_no`). Il est de plus utile pour calculer une décomposition de m d'après la proposition 7.1 : les sommets des composantes connexes de G , qui sont des lettres de m , donnent les lettres de la décomposition de m . La méthode proposée en fin de partie 5 demandait une complexité en $\mathcal{O}(n^3)$. Or obtenir les composantes connexes de G est linéaire en la taille du graphe (c'est un parcours en profondeur effectué par `extrait_connexe_no`). Il rabaisse donc la complexité du calcul d'une décomposition à $\mathcal{O}(n^2)$ (fonction `decomposition_premier`). Cette décomposition permet ensuite de colorier les composantes premières d'un nœud comme visible en figure 18 (la coloration étant effectuée par `visuel_premier`).

Proposition 7.2 (Factorisation). *Soit un type de nœud T de type de Gauss t , de décomposition en types isolés $t_1 \dots t_r$. Il existe des types de nœuds T_1, \dots, T_r uniques admettant pour types de Gauss respectifs t_1, \dots, t_r . On dit que T est **factorisable** en le produit $T_1 \dots T_r$, et T_1, \dots, T_r est la **décomposition en type** de T .*

Théorème 2. *La décomposition en types isolés et la décomposition en types sont des invariants de nœuds.*

Ces invariants sont malheureusement difficilement manipulables en machine. Définir un type est très compliqué, il faudrait considérer un mot de Gauss et toutes ses transformations élémentaires. Il est de plus très coûteux de comparer la forme de deux graphes. Les graphes d’emboîtement s’avèrent donc être difficilement comparables.

Définition 7.1 (Cardinal de décomposition). *Soit m un mot de Gauss et m_1, \dots, m_k sa décomposition. Notons $l(m_i)$ le nombre de lettres distinctes de m_i et $T_s = \{m_i \mid i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket \wedge l(m_i) = s\}$.*

On appelle $C_d(m) = \{(i, \text{Card}(T_i)) \mid i \in \mathbb{N}^\}$ le **cardinal de décomposition** de m .*

Théorème 3. *Le cardinal de décomposition est un invariant de nœuds.*

Le calcul du cardinal de décomposition (par `card_decomp`) est possible en comptant le nombre d’éléments dans les composantes connexes du graphe d’emboîtement, on peut ensuite stocker dans une liste le nombre de composantes à tant d’éléments. Cette liste représente le cardinal de décomposition et est donc rapidement calculable et comparable (comparaison faite par `equiv_card`) à une autre liste.

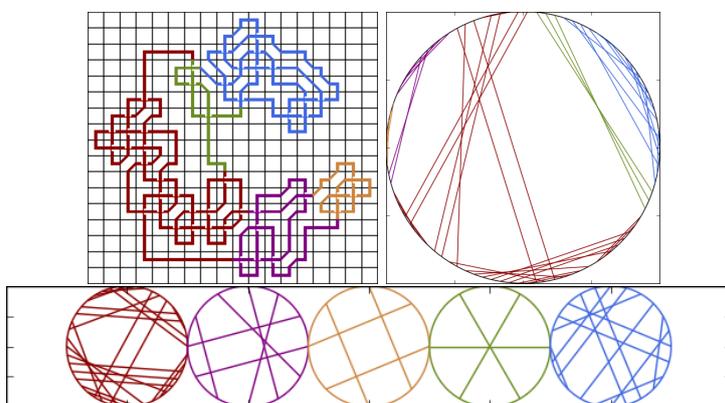


FIGURE 18 – Exemple de factorisation, les mots de Gauss sont représentés sous forme de diagrammes de cordes. Son cardinal de décomposition est $[(3, 1), (4, 1), (6, 1), (12, 1), (22, 1)]$

Bibliographie et remerciements

Références

- [1] Collectif. *La science des nœuds*. Belin, 2003.
- [2] Peter Cromwell. *Knots and Links*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] William Menasco et Morwen Thistlethwaite. *The Classification of Alternating Links*. Annals of Mathematics, 1993.
- [4] Richard H. Crowell et Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, 1963.
- [5] Franck Jedrzejewsk. *Séminaire MaMuX : Applications de la théorie des nœuds au domaine musical*. [lien](#).
- [6] Alexei Sossinsky. *Noeuds : Genèse d’une Théorie Mathématique*. Seuil, 1999.
- [7] Christian Soulié. *Complete invariant graphs of alternating knots*. arXiv/0404490, 2004. [lien](#).
- [8] A. Stoimenow. *Tait’s conjectures and odd crossing numbers amphicheiral knots*. arXiv/0704.1941, 2007. [lien](#).
- [9] Witt Sumners. *Lifting the Curtain : Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes*. [lien](#).

Merci à [Julien Marché](#), professeur de mathématiques à l’université Pierre et Marie Curie et Guillaume Brevet, professeur de mathématiques en classe prépa au lycée Pierre de Fermat pour leurs aides précieuses dans ce travail. Merci de plus à Joan Bellier-Millès et Anne Granier pour leurs nombreux conseils concernant la rédaction de ce document.